Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 180 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 12 stron (zadania 1 – 10). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Życzymy powodzenia!

Zadanie 1. (3 pkt)

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n, liczba $\frac{1}{9}(100^{n+1} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4)$ jest kwadratem liczby naturalnej.

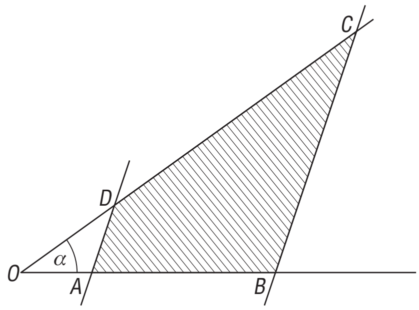
Zadanie 2. (3 pkt)

Oblicz sumę wszystkich liczb n-tego wiersza tablicy ($n \in \mathbf{N}$, $n > 1$) .

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & & \\ 2 & 3 & 4 & & & & & & & & & & \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & & & & & & & \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & & & & & & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. (7 pkt)

Wiedząc, że $\alpha = 30°$, $|OD| = \sqrt{3}$, $|OC| = 6\sqrt{3}$, $|AB| = 5$ oraz $AD \parallel BC$, oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku.



Zadanie 4. (6 pkt)

Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami równania $x^2 + x + A = 0$, a liczby x_3, x_4 są pierwiastkami równania $x^2 + 4x + B = 0$. Wiadomo, że (x_1, x_2, x_3, x_4) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach całkowitych. Wyznacz A i B.

Zadanie 5. (6 pkt)

Napisz równanie okręgu o środku $S(1, 1)$, który na prostej o równaniu $x - y + 4 = 0$ odcina cięciwę AB długości $2\sqrt{2}$. Wykonaj rysunek.

Zadanie 6. (4 pkt)

Wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, ma dwa różne miejsca zerowe: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 3$, przy czym pierwiastek x_2 jest dwukrotny. Dla argumentu 1 wartość wielomianu jest równa (-12).

a) Wyznacz wartości współczynników a, b, c, d.

b) Dla wyznaczonych współczynników rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.

Zadanie 7. (6 pkt)

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego jeden bok ma długość $c = 4$, a kąty przyległe do tego boku mają miary $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Wysokość ostrosłupa ma długość równą długości promienia koła opisanego na podstawie. Oblicz objętość ostrosłupa. Podaj jej dokładną wartość.

Zadanie 8. (3 pkt)

Wiedząc, że $\log_3 4 = a$ i $\log_3 5 = b$, oblicz $\log_{27} 0{,}8$.

Zadanie 9. (7 pkt)

Z podanego równania $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{y+1}=1$, gdzie $x \neq 2 \wedge y \neq -1$, wyznacz y jako funkcję zmiennej x. Narysuj wykres funkcji $y=f(|x|)$.

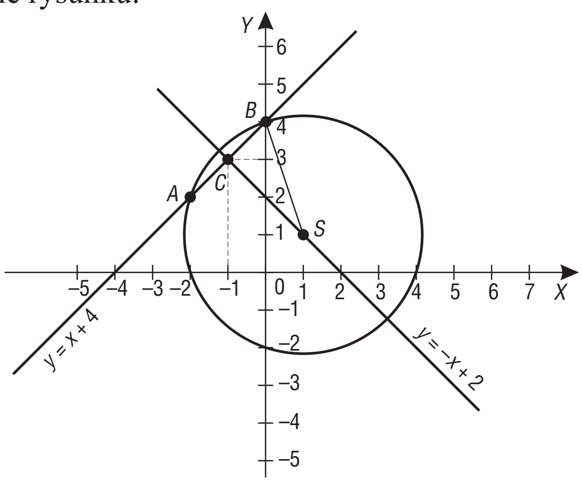
Zadanie 10. (5 pkt)

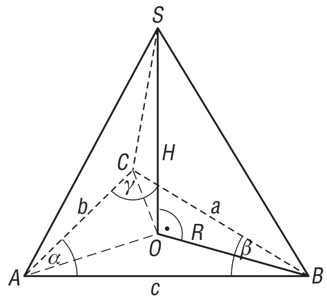
W urnie znajduje się n kul czarnych i $2n$ kul białych ($n \in \boldsymbol{N} \wedge n \geq 2$). Losujemy jednocześnie dwie kule. Dla jakich n prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru jest większe od prawdopodobieństwa wylosowania dwóch kul różnych kolorów?

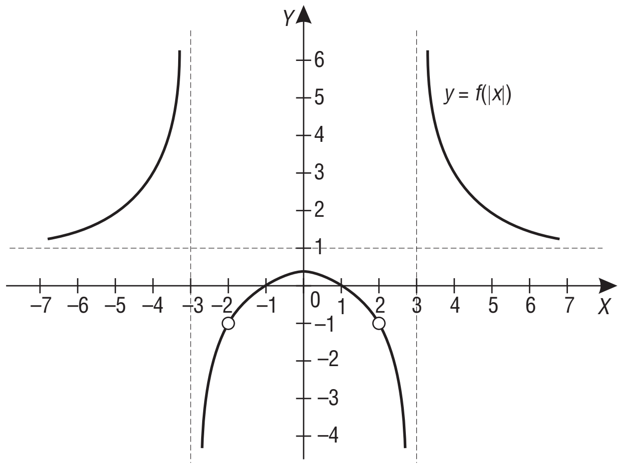
BRUDNOPIS

PROPOZYCJA SCHEMATU OCENIANIA

Numer zadania		Kolejne etapy rozwiązania	Liczba punktów
1	1.1	Zapisanie wyrażenia $100^{n+1} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4$ w postaci: $100^{n+1} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4 = (10^{n+1})^2 + 4 \cdot 10^{n+1} + 4 = (10^{n+1} + 2)^2$.	1
	1.2	Zapisanie liczby $\frac{1}{9}(100^{n+1} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4)$ w postaci: $\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2$	1
	1.3	Uzasadnienie, że liczba $\frac{10^{n+1}+2}{3}$ jest liczbą naturalną dla $n \in \boldsymbol{N}$: $10^{n+1} + 2 = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot ... \cdot 10}_{n+1} + 2 = 1\underbrace{00...0}_{n+1}2$, zatem suma jej cyfr wynosi 3. Stąd $3 \mid 10^{n+1} + 2$ dla $n \in N$, czyli liczba $\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2$ jest kwadratem liczby naturalnej.	1
2	2.1	Stwierdzenie, że w każdym wierszu (oprócz pierwszego) liczby wiersza tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 1$.	1
	2.2	Ustalenie, że w n-tym wierszu ($n \in \boldsymbol{N}_+ - \{1\}$) występuje ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_1 = n$, $r = 1$, zaś liczba wyrazów wiersza jest równa $2n - 1$.	1
	2.3	Obliczenie sumy liczb n-tego wiersza: $\left[\frac{2n+(2n-2)\cdot 1}{2}\right]\cdot(2n-1)$, skąd otrzymujemy $(2n - 1)^2$.	1
3	3.1	Obliczenie długości odcinka OA na podstawie twierdzenia Talesa: $\|OA\| = 1$.	1
	3.2	Obliczenie pola ΔOAD: $P_{\Delta OAD} = \frac{1}{2} \cdot \|OA\| \cdot \|OD\| \cdot \sin\alpha$, skąd $P_{\Delta OAD} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.	1
	3.3	Obliczenie pola ΔOBC: $P_{\Delta OBC} = \frac{36\sqrt{3}}{4}$.	1
	3.4	Obliczenie pola trapezu: $P = P_{\Delta OBC} - P_{\Delta OAD} = \frac{35\sqrt{3}}{4}$.	1
	3.5	Obliczenie długości odcinka AD na podstawie tw. cosinusów dla ΔOAD: $\|AD\|^2 = \|OA\|^2 + \|OD\|^2 - 2 \cdot \|OA\| \cdot \|OD\| \cdot \cos\alpha$, skąd $\|AD\| = 1$.	1
	3.6	Obliczenie długości odcinka BC: $\|BC\| = 6$.	1
	3.7	Obliczenie obwodu trapezu: $12 + 5\sqrt{3}$.	1

4	4.1	Zastosowanie wzorów Viete'a dla obu równań i zapisanie warunków zadania w postaci: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_3 + x_4 = -4 \end{cases} \wedge \begin{cases} A = x_1 \cdot x_2 \\ B = x_3 \cdot x_4 \end{cases} \wedge \begin{cases} A \le \frac{1}{4} \\ B \le 4 \end{cases}$ gdzie $x_2 = x_1 q$, $x_3 = x_1 q^2$, $x_4 = x_1 q^3$; q – iloraz ciągu, x_1, x_2, x_3, x_4 – liczby całkowite.	2
	4.2	Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} x_1(1+q) = -1 \\ x_1 q^2 (1+q) = -4 \end{cases}$, skąd $\begin{cases} q = -2 \\ x_1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} q = 2 \\ x_1 = -\frac{1}{3} \end{cases}$ (druga para nie spełnia warunków zadania).	2 (w tym 1 pkt za stosowne założenia)
	4.3	Wyznaczenie wyrazów ciągu spełniającego warunki zadania: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$, $x_4 = -8$.	1
	4.4	Obliczenie wartości współczynników A oraz B: $A = -2$, $B = -32$.	1
5	5.1	Wyznaczenie równania prostej, prostopadłej do prostej $x - y + 4 = 0$, przechodzącej przez punkt $S(1, 1)$: $y = -x + 2$.	1
	5.2	Wyznaczenie współrzędnych środka C cięciwy AB: C: $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$, skąd $C(-1, 3)$.	1
	5.3	Obliczenie długości odcinka CS: $\lvert CS \rvert = 2\sqrt{2}$.	1
	5.4	Obliczenie długości promienia okręgu na podstawie tw. Pitagorasa dla ΔCSB: $r = \sqrt{10}$.	1
	5.5	Napisanie równania okręgu: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$.	1
	5.6	Wykonanie rysunku:  	1
6	6.1	Zapisanie wielomianu w postaci: $W(x) = a(x+2)(x-3)^2$, gdzie $a \neq 0$.	1
	6.2	Obliczenie wartości współczynnika a, na podstawie informacji $W(1) = -12$: $a = -1$.	1

	6.3	Zapisanie wielomianu w postaci: $W(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 18$ i podanie współczynników: $a = -1$, $b = 4$, $c = 3$, $d = -18$.	1
	6.4	Podanie zbioru rozwiązań nierówności $W(x) \geq 0$: $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \{3\}$.	1
7	7.1	Wykonanie rysunku wraz z oznaczeniami.  $\lvert AB\rvert = c = 4$, $\alpha = \lvert\sphericalangle BAC\rvert = 75°$, $\beta = \lvert\sphericalangle ABC\rvert = 45°$, $\gamma = \lvert\sphericalangle ACB\rvert$, $\lvert OS\rvert = H$, $b = \lvert AC\rvert$, $a = \lvert BC\rvert$, $H > 0$, R – promień koła opisanego na podstawie ($R > 0$).	1
	7.2	Obliczenie miary γ trzeciego kąta trójkąta ($\gamma = 60°$) i zastosowanie tw. sinusów do obliczenia promienia koła opisanego na podstawie: $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, skąd $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, zatem $H = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.	1
	7.3	Obliczenie długości drugiego boku trójkąta, na podstawie tw. sinusów: $b = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ (lub $a = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 75^{\circ}$).	1
	7.4	Obliczenie wartości sin 75°: $\sin 75° = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{3}$.	1
	7.5	Obliczenie pola ΔABC: $P = \frac{4(\sqrt{3}+3)}{3}$.	1
	7.6	Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{16(1+\sqrt{3})}{9}$.	1
8	8.1	Zapisanie $\log_{27}0{,}8$ w postaci różnicy: $\log_{27}4 - \log_{27}5$.	1
	8.2	Zapisanie $\log_{27}4$ oraz $\log_{27}5$ w postaci: $\log_{27}4 = \frac{1}{3\log_4 3}$ oraz $\log_{27}5 = \frac{1}{3\log_5 3}$.	1
	8.3	Zapisanie $\log_{27}4$ oraz $\log_{27}5$ w postaci: $\log_{27}4 = \frac{1}{3}a$, $\log_{27}5 = \frac{1}{3}b$ oraz podanie odpowiedzi: $\log_{27}0{,}8 = \frac{a-b}{3}$.	1

9	9.1	Wyznaczenie y z równania: $y=\dfrac{x-1}{x-3}$, gdzie $x\neq 3$.	2 (w tym 1 pkt za założenie $x\neq 3$)
	9.2	Przekształcenie równania do postaci: $y=\dfrac{2}{x-3}+1$.	1
	9.3	Podanie informacji w jaki sposób powstaje wykres funkcji $f(x)=\dfrac{2}{x-3}+1$: $y=\dfrac{2}{x}$, $T_{\vec{u}}=[3,\ 1]$.	1
	9.4	Narysowanie wykresu funkcji $f(x)=\dfrac{2}{x-3}+1$, $x\neq 3$.	1
	9.5	Narysowanie wykresu funkcji $y=f(\lvert x\rvert)$ z uwzględnieniem założeń: $x\neq 3\ \wedge\ x\neq 2\ \wedge\ y\neq -1$. 	2
10	10.1	Obliczenie $\overline{\overline{\Omega}}$: $\overline{\overline{\Omega}}=\binom{3n}{2}=\dfrac{3n(3n-1)}{2}$.	1
	10.2	Obliczenie $\overline{\overline{A}}$, gdzie A – zdarzenie polegające na wylosowaniu kul tego samego koloru: $\overline{\overline{A}}=\binom{n}{2}+\binom{2n}{2}=\dfrac{n(5n-3)}{2}$.	1
	10.3	Obliczenie $\overline{\overline{B}}$, gdzie B – zdarzenie polegające na wylosowaniu kul o różnych kolorach: $\overline{\overline{B}}=\binom{n}{1}\binom{2n}{1}=2n^2$.	1
	10.4	Obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń A oraz B: $P(A)=\dfrac{5n-3}{3(3n-1)}$, $P(B)=\dfrac{4n}{3(3n-1)}$.	1
	10.5	Rozwiązanie nierówności $P(A)>P(B)$: $n>3\ \wedge\ n\in \boldsymbol{N}$.	1